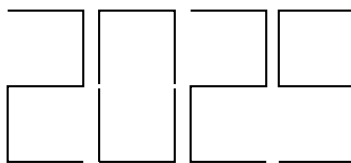


Задача 1

В-1 Из спичек выложено число:

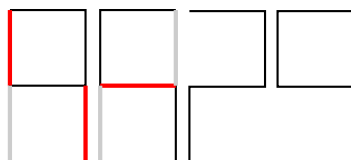


Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить, переложив 3 спички?
Цифры спичками пишутся так:

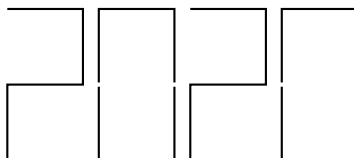


Ответ: 9525

Решение. Добиться 9525 можно так:



В-2 Из спичек выложено число:

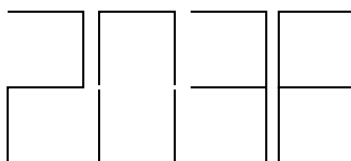


Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить, переложив 3 спички?
Цифры спичками пишутся так:



Ответ: 9520

В-3 Из спичек выложено число:

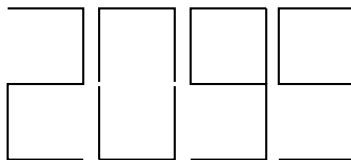


Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить, переложив 3 спички?
Цифры спичками пишутся так:



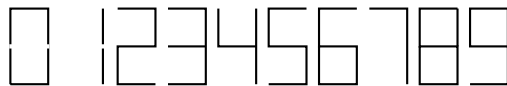
Ответ: 9935

В-4 Из спичек выложено число:



Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить, переложив 3 спички?

Цифры спичками пишутся так:



Ответ: 9995

Задача 2

В-1 На угловой клетке клетчатой игровой доски 8×8 лежит игровой кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 5 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 5 очков?

Ответ: 64

Решение. С помощью манёвра «вправо»–«вверх»–«влево» мы окажемся на клетке выше исходной с пятёркой наверху. Манёвр можно отзеркалить и повернуть, для какого-нибудь его варианта всегда есть место — то есть можно перейти на любую соседнюю клетку, сохранив 5 наверху. Значит, так можно добраться до любой клетки доски.

В-2 На угловой клетке клетчатой игровой доски 7×7 лежит игровой кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 5 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 5 очков?

Ответ: 49

В-3 На угловой клетке клетчатой игровой доски 9×9 лежит игровой кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 5 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 5 очков?

Ответ: 81

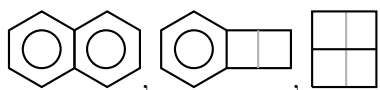
В-4 На угловой клетке клетчатой игровой доски 6×6 лежит игровой кубик, грань которого по размерам совпадает с клеткой. На верхней грани кубика 5 очков. Кубик перекачивается по клеткам доски. На сколько клеток доски можно добраться такими перекачиваниями (включая исходную клетку) так, чтобы в конце пути на верхней грани кубика тоже оказалось 5 очков?

Ответ: 36

Задача 3

В-1 У Богдана есть шестиугольные гайки с квадратными боковыми гранями и клей. Гайки можно склеивать так, чтобы одна грань полностью совместилась с другой.

Например, две гайки можно склеить тремя разными способами:



А сколько есть способов склеить три гайки?

Ответ: 12

Решение. Возьмём за основу три варианта склейки двух гаек и подсчитаем, сколько есть разных способов добавить к ним третью.

- Плоские фигуры (к двум гайкам в первой конфигурации приклеивается третья, квадратной гранью, в той же ориентации) — 3 штуки.
- Неплоские без склеек по шестиугольнику (первая конфигурация плюс вертикальная гайка, или вторая конфигурация, к которой добавлена вертикальная или горизонтальная гайка) — ещё 6 вариантов.
- Неплоские со склейкой по шестиугольнику (клеим ко всем трём конфигурациям гайку шестиугольной гранью) — ещё 3 варианта.

В сумме получается 12.

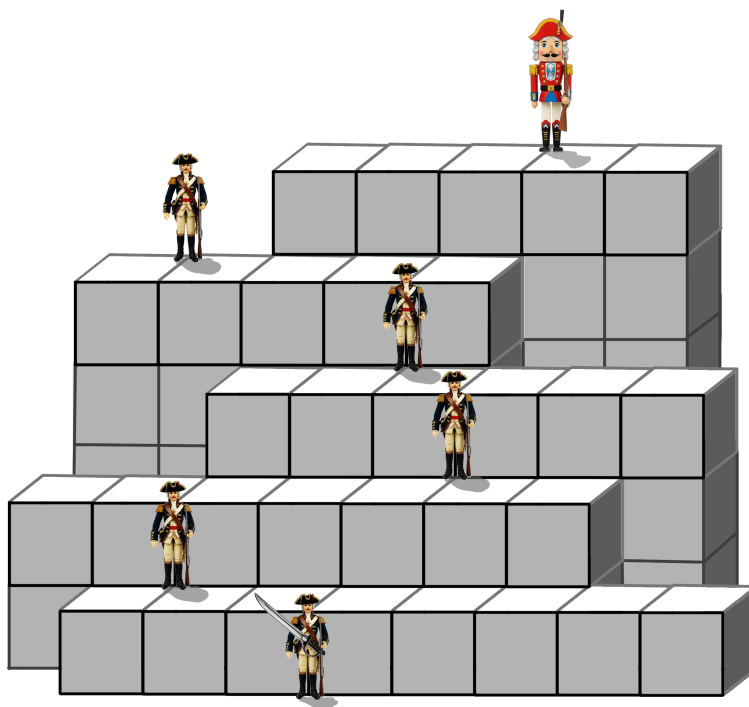
Задача 4

В-1

На башне из кубиков стоит Щелкунчик. У подножия башни верный слуга-солдатык хочет передать ему саблю, чтобы тот одолел Мышиного короля. На каждом ярусе башни стоят игрушечные солдатики, которые могут передавать саблю друг другу снизу вверх (только при условии, что они стоят друг под другом), могут перемещаться по своему уровню строго горизонтально и не могут прыгать с уровня на уровень (Щелкунчик тоже может ходить только по своему уровню). Переместиться по своему уровню на 1 клетку игрушка может за 1 секунду, переместить саблю на 1 уровень - тоже ровно за 1 секунду. За какое наименьшее время можно передать саблю Щелкунчику? Ведь Мышиный король близко.

(Вдоль своего уровня можно перемещаться на нецелое число клеток.

Длина стороны у всех кубиков одинакова.)

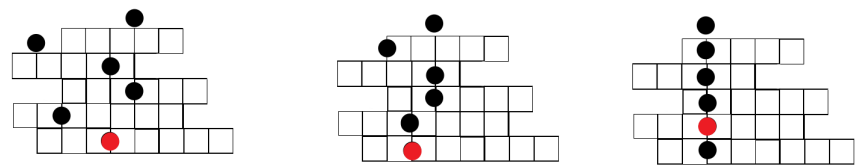


Ответ: 6 секунд

Решение. Заметим, что задача солдатиков на соседних уровнях - встретиться как можно быстрее, то есть сделать так, чтобы расстояние между ними сократилось как можно быстрее. Причем сокращать расстояние они могут, пока товарищи на нижних уровнях перемещаются и

пока передают саблю на уровень выше. Поднять саблю с 1-го на 6-й уровень можно не менее чем за 5 секунд. Также солдатики на 1-м и 2-м уровне могут встретиться самое раннее через 1 секунду. Поэтому саблю можно передать Щелкунчику не менее чем за 6 секунд.

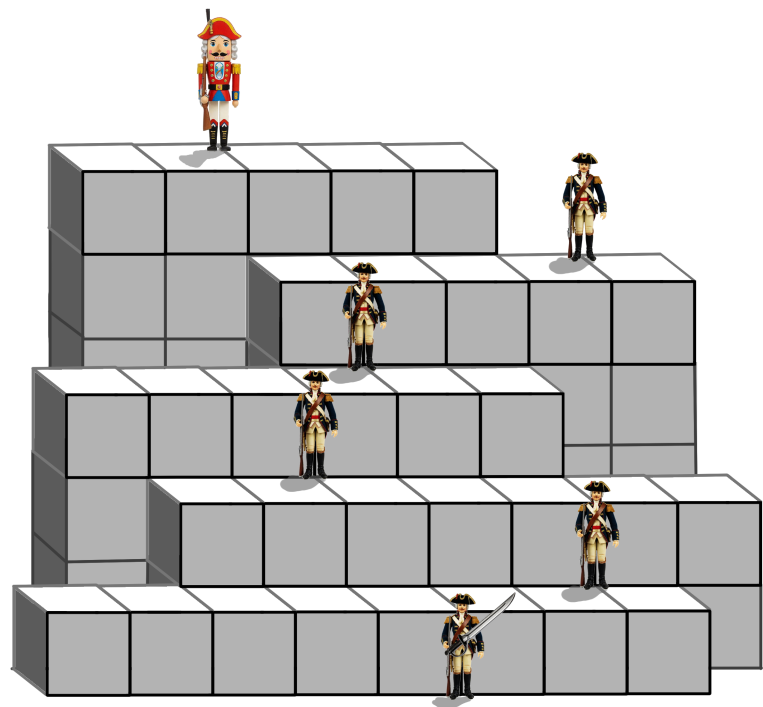
Пример, как это можно сделать за 6 секунд: на рис.1-3 (солдатык - черный кружок, солдатик с саблей - красный кружок) саблю поднимают на 2-й уровень за 2 секунды, а далее со 2 уровня на 6-й солдатики передают его за 4 секунды.



В-2

На башне из кубиков стоит Щелкунчик. У подножия башни верный слуга-солдатык хочет передать ему саблю, чтобы тот одолел Мышиного короля. На каждом ярусе башни стоят игрушечные солдатики, которые могут передавать саблю друг другу снизу вверх (только при условии, что они стоят друг под другом), могут перемещаться по своему уровню строго горизонтально и не могут прыгать с уровня на уровень (Щелкунчик тоже может ходить только по своему уровню). Переместиться по своему уровню на 1 клетку игрушка может за 2 секунды, переместить саблю на 1 уровень - тоже ровно за 2 секунды. За какое наименьшее время можно передать саблю Щелкунчику? Ведь Мышиный король близко.

(Вдоль своего уровня можно перемещаться на нецелое число клеток.
Длина стороны у всех кубиков одинакова.)



Ответ: 12 секунд

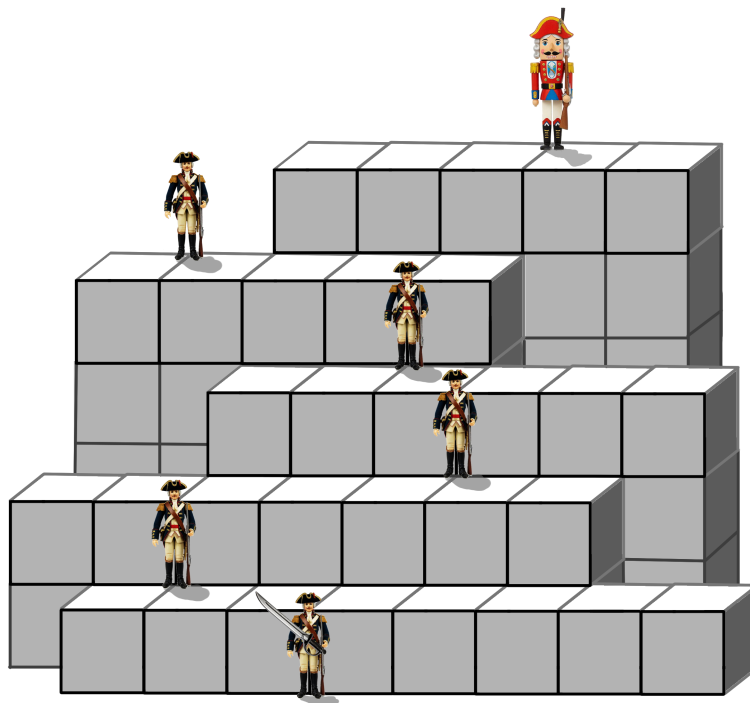
В-3

На башне из кубиков стоит Щелкунчик. У подножия башни верный слуга-солдатык хочет передать ему саблю, чтобы тот одолел Мышиного короля. На каждом ярусе башни стоят игрушечные солдатики, которые могут передавать саблю друг другу снизу вверх (только при

условии, что они стоят друг под другом), могут перемещаться по своему уровню строго горизонтально и не могут прыгать с уровня на уровень (Щелкунчик тоже может ходить только по своему уровню). Переместиться по своему уровню на 1 клетку игрушка может за 3 секунды, переместить саблю на 1 уровень - тоже ровно за 3 секунды. За какое наименьшее время можно передать саблю Щелкунчику? Ведь Мышиный король близко.

(Вдоль своего уровня можно перемещаться на нецелое число клеток.

Длина стороны у всех кубиков одинакова.)



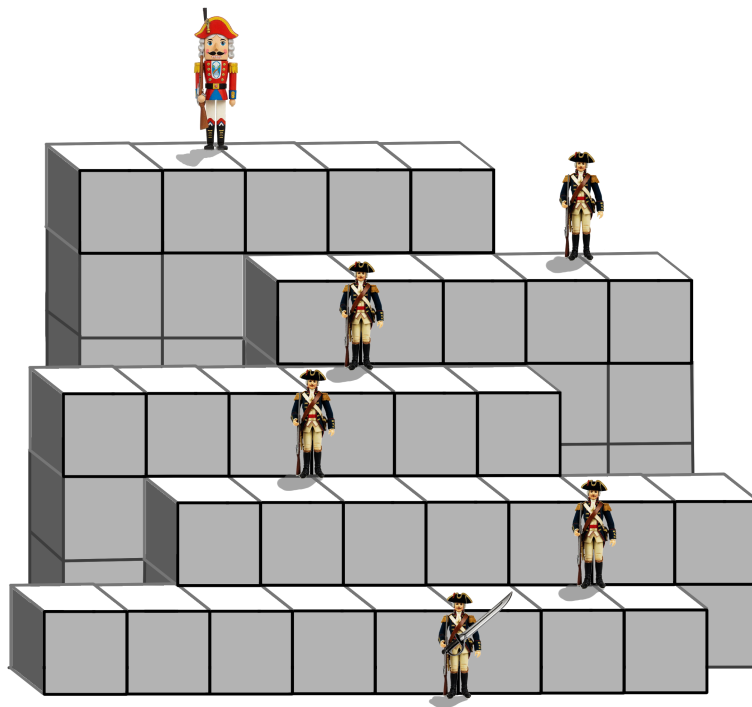
Ответ: 18 секунд

В-4

На башне из кубиков стоит Щелкунчик. У подножия башни верный слуга-солдатик хочет передать ему саблю, чтобы тот одолел Мышиного короля. На каждом ярусе башни стоят игрушечные солдатики, которые могут передавать саблю друг другу снизу вверх (только при условии, что они стоят друг под другом), могут перемещаться по своему уровню строго горизонтально и не могут прыгать с уровня на уровень (Щелкунчик тоже может ходить только по своему уровню). Переместиться по своему уровню на 1 клетку игрушка может за 4 секунды, переместить саблю на 1 уровень - тоже ровно за 4 секунды. За какое наименьшее время можно передать саблю Щелкунчику? Ведь Мышиный король близко.

(Вдоль своего уровня можно перемещаться на нецелое число клеток.

Длина стороны у всех кубиков одинакова.)



Ответ: 24 секунды

Задача 5

В-1 У двух купцов есть драгоценные камни: у первого 100 красных и 100 синих, у второго 100 жёлтых и 100 зелёных. Красный камень стоит 1, жёлтый — 2, зелёный — 3, синий — 4. Они хотят совершить обмен камнями. Назовём обмен *честным*, если в нём с обеих сторон совпадает и количество камней, и их суммарная стоимость. Сколькими различными способами купцы могут совершить честный обмен? Все одноцветные камни одинаковы, в обмене должен участвовать хотя бы один камень.

Ответ: 3400

Решение. Честный обмен может включать в себя четвёрки $1 + 4 = 2 + 3$ (обмен первого типа). Удалив все такие четвёрки, получим честный обмен не более чем с тремя видами камней. Если это $(1; 2; 3)$ или $(2; 3; 4)$, то из них честного обмена не получится. Если это $(1; 2; 4)$, то любой честный обмен состоит из обменов $1 + 1 + 4 = 2 + 2 + 2$ (обмен второго типа). Если это $(1; 3; 4)$, то любой честный обмен состоит из обменов $1 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3$ (обмен третьего типа). Значит, любой честный обмен получается комбинацией обменов первого, второго и третьего типа, при этом можно считать, что обмены второго и третьего типа не встречаются одновременно. Обменов, которые включают только обмены первого типа, всего 100. Далее посчитаем обмены, которые включают хотя бы один обмен второго типа. Если обменов второго типа 33, то к ним можно добавить или не добавит один обмен первого типа. Если обменов второго типа 32, то к ним можно добавить от 0 до 4 обменов первого типа. Продолжая эту последовательность, получаем $2 + 5 + 8 + \dots + 92 + 95 + 98 = 1650$ таких обменов. Столько же будет обменов, включающих в себя хотя бы один обмен третьего типа. Следовательно, всего получается $100 + 1650 + 1650 = 3400$ способов совершить честный обмен.

В-2 У двух купцов есть драгоценные камни: у первого 150 красных и 150 синих, у второго 150 жёлтых и 150 зелёных. Красный камень стоит 1, жёлтый — 2, зелёный — 3, синий — 4. Они хотят совершить обмен камнями. Назовём обмен *честным*, если в нём с обеих сторон совпадает и количество камней, и их суммарная стоимость. Сколькими различными способами купцы могут совершить честный обмен? Все одноцветные камни одинаковы, в обмене должен участвовать хотя бы один камень.

Ответ: 7600

В-3 У двух купцов есть драгоценные камни: у первого 200 красных и 200 синих, у второго 200 жёлтых и 200 зелёных. Красный камень стоит 1, жёлтый — 2, зелёный — 3, синий — 4.

Они хотят совершить обмен камнями. Назовём обмен *честным*, если в нём с обеих сторон совпадает и количество камней, и их суммарная стоимость. Сколькими различными способами купцы могут совершить честный обмен? Все одноцветные камни одинаковы, в обмене должен участвовать хотя бы один камень.

Ответ: 13466

В-4 У двух купцов есть драгоценные камни: у первого 120 красных и 120 синих, у второго 120 жёлтых и 120 зелёных. Красный камень стоит 1, жёлтый — 2, зелёный — 3, синий — 4. Они хотят совершить обмен камнями. Назовём обмен *честным*, если в нём с обеих сторон совпадает и количество камней, и их суммарная стоимость. Сколькими различными способами купцы могут совершить честный обмен? Все одноцветные камни одинаковы, в обмене должен участвовать хотя бы один камень.

Ответ: 4880

В-5 У двух купцов есть драгоценные камни: у первого 77 красных и 77 синих, у второго 77 жёлтых и 77 зелёных. Красный камень стоит 1, жёлтый — 2, зелёный — 3, синий — 4. Они хотят совершить обмен камнями. Назовём обмен *честным*, если в нём с обеих сторон совпадает и количество камней, и их суммарная стоимость. Сколькими различными способами купцы могут совершить честный обмен? Все одноцветные камни одинаковы, в обмене должен участвовать хотя бы один камень.

Ответ: 2027

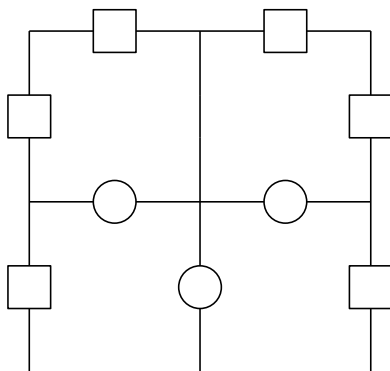
В-6 У двух купцов есть драгоценные камни: у первого 222 красных и 222 синих, у второго 222 жёлтых и 222 зелёных. Красный камень стоит 1, жёлтый — 2, зелёный — 3, синий — 4. Они хотят совершить обмен камнями. Назовём обмен *честным*, если в нём с обеих сторон совпадает и количество камней, и их суммарная стоимость. Сколькими различными способами купцы могут совершить честный обмен? Все одноцветные камни одинаковы, в обмене должен участвовать хотя бы один камень.

Ответ: 16576

Задача 6

В-1 На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?



Ответ: 164

Решение. В зависимости от того, как раскрыты двери, на этаже образуется несколько изолированных друг от друга «отсеков». Внутри каждого отсека получается какое-то количество окон k , и сквозняк внутри отсека будет, если там открыто два или более окна. Следовательно, безопасных вариантов на отсек будет $k + 1$ — один вариант «все окна закрыты» плюс k вариантов «открыто только одно из окон». Числа безопасных вариантов на каждый отсек нужно перемножить между собой. Распишем возможные случаи (на рисунках будут отсеки и число окон в них)

Двери закрыты:

2	2
1	1

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

Открыта левая дверь:

3	2
	1

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Открыта правая дверь:

2	3
1	

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Открыта нижняя дверь:

2	2
2	

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Открыты левая и нижняя дверь:

4	2

$$5 \cdot 3 = 15$$

Открыты правая и нижняя дверь:

2	4

$$5 \cdot 3 = 15$$

Открыты правая и левая дверь:

3	3
---	---

$$4 \cdot 4 = 16$$

Все двери открыты:

6	

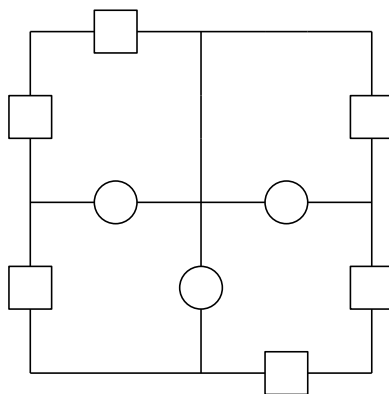
$$7 = 7$$

В сумме получится ответ:

$$36 + 24 + 24 + 27 + 15 + 15 + 16 + 7 = 164$$

В-2 На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

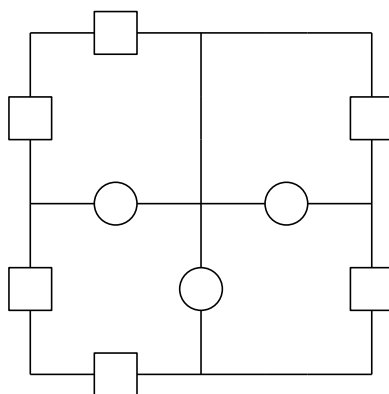
Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?



Ответ: 158

В-3 На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

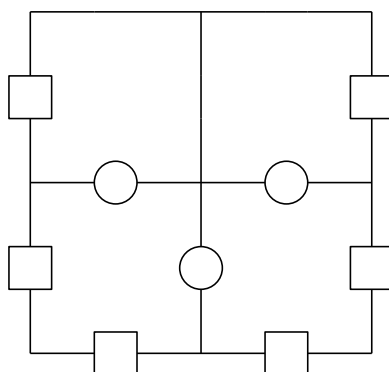
Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?



Ответ: 156

В-4 На этаже есть четыре комнаты, три двери и шесть окон (см. рисунок, окна отмечены квадратами, двери — кругами). Каждую дверь и каждое окно можно оставить либо открытым, либо закрытым. Если ветер может войти в здание через одно окно и выйти через другое (путь не обязательно по прямой) — будет сквозняк. Закрытые окна и двери не дают пройти ветру.

Сколькими способами можно оставить двери и окна так, чтобы не было сквозняка?



Ответ: 151